Über eine Methode zu einer Statistik der Versetzungen

Von Hans Donth*

Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule und Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart

(Z. Naturforschg. 9a, 264 [1954]; eingeg. am 3. März 1954)

Die Theorie der Versetzungen gestattet es heute, die Wechselwirkung von Versetzungen mit äußeren Spannungen, Wärmeschwingungen, Gitterstörungen und anderen Versetzungen der gleichen oder fremder Gleitebenen zu berechnen. Die Aufgabe einer Statistik der Versetzungen ist es, ausgehend von einer Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung zur Zeit t^0 von Versetzungen und ihrer Geschwindigkeit die Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen beliebigen späteren Zeitpunkt t^1 anzugeben. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die Versetzungen in ihrer Gleitebene eine beliebig gekrümmte Lage einnehmen können.

Die äußere Kraft, die auf ein Element einer Versetzung einwirkt, dessen Ort, Richtung, Länge, Geschwindigkeit, Burgers-Vektor und Gleitebene vorgegeben ist, hat eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Infolge der voneinander unabhängigen Einwirkung einer großen Anzahl von Beiträgen zu dieser Kraft, kann diese Verteilung nach dem Satz von Liapounoff als Gaußsche Normalverteilung angenommen werden. Eine solche ist durch Angabe ihrer beiden ersten Momente eindeutig bestimmt. In das erste Moment der Verteilung der auf ein Versetzungselement einwirkenden Kräfte geht die äußere Schubspannung und der Mittelwert der Kräfte ein, die durch andere Versetzungen, Gitterstörungen und bei bewegten Versetzungen auch durch Wärmeschwingungen verursacht werden. Das zweite Moment ist die Summe der Streuungen dieser Kräfte.

Zur Unterscheidung der einzelnen Elemente einer Versetzungslinie wird ein Parameter ξ eingeführt. Ein Versetzungselement kann durch seinen Ort $\mathfrak{x}$, den Linienvektor $\mathfrak{r} = \partial \mathfrak{x}/\partial \xi$ und einen Elementimpuls $\mathfrak{G} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{c}]$ beschrieben werden, wenn $\mathfrak{c}$ der Geschwindigkeitsvektor senkrecht zu $\mathfrak{r}$ ist. $\mathfrak{G}$ ist ein dem Normalenvektor der Gleitebene paralleler Vektor. Die Übergangswahrscheinlichkeit von $\mathfrak{G}$ zur Zeit t^μ zu $\mathfrak{G}$ zur benachbarten Zeit $t^{\mu+1} = t^\mu + \Delta t$ wird nach den obigen Angaben über die Kraft auf ein Versetzungselement durch eine Normalverteilung gegeben. Es besteht zwischen den Abweichungen der Impulsänderung $\Delta\, \mathfrak{G}^{\nu+1}$ des Elementes mit dem Parameterwert $\xi^{\nu+1}$ vom Mittelwert dieser Impulsänderung und der entsprechenden Abweichung der Impulsänderung $\Delta\, \mathfrak{G}^\nu$ des benachbarten Elementes zum Parameterwert ξ^ν eine Korrelation. Daher hängt die Verteilung von $\Delta\, \mathfrak{G}^{\nu+1}$ von den Werten von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{G}$ zu den Zeit- und Parameterpunkten t^μ, ξ^ν; $t^{\mu+1}$, ξ^ν und t^μ, $\xi^{\nu+1}$, kurz von $X^{\mu,\nu}$, $X^{\mu+1,\nu}$ und $X^{\mu,\nu+1}$ ab, wenn $X = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{r}, \mathfrak{G}\}$ einen Vektor in einem Phasenraum aus $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{G}$ bedeutet. Der Übergang von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{r}$ ist determiniert durch $X^{\mu,\nu}$, $X^{\mu,\nu+1}$ und $X^{\mu+1,\nu}$, so daß für die Übergangswahrscheinlichkeit von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{r}$ eine entartete Normalverteilung mit verschwindender Streuung angegeben werden kann.

Da die Übergangswahrscheinlichkeiten eines Versetzungselementes nur von dem Zustand dieses Elementes sowie vom Zustand des Nachbarelementes und dessen Zustandsänderung (Übergang) abhängt, ist die Bewegung eines Versetzungselementes im Phasenraum aus den Variablen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{r}$ in mathematischer Hinsicht ein doppelter Markoffscher Prozeß[1]. t und ξ sind seine beiden Parameter. Er hat die Gaußsche Übergangswahrscheinlichkeit $v\ (X^{\mu+1,\nu+1} \mid X^{\mu,\nu},\ X^{\mu,\nu+1},\ X^{\mu+1,\nu})$. Die Übergangswahrscheinlichkeit hat die spezielle Eigenschaft, das Produkt dreier voneinander unabhängiger Übergangswahrscheinlichkeiten für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{r}$ zu sein. Es ist möglich, diesen Prozeß auf eine Form zurückzuführen, bei dem das erste Moment von v bezüglich X_i die Gestalt $A_i = (X_i^{\mu+1,\nu} - X_i^{\mu,\nu}) + \alpha_i$ besitzt und α_i und die Komponenten B_{ik} des zweiten Momentes sich als Funktionen nur von den X_i sowie der Differenzen $(X_i^{\mu,\nu+1} - X_i^{\mu,\nu})$; $(X_\sigma^{\mu+1,\nu} - X_\sigma^{\mu,\nu})$ entwickeln lassen.

Unter Verallgemeinerung eines von Kolmogoroff[2] angegebenen Verfahrens lassen sich Integrodifferentialgleichungen für

$$\frac{\partial V(X^{\mu,\nu}, X^{\mu,\nu+1})}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V(X^{\mu,\nu}, X^{\mu+1,\nu})}{\partial \xi}$$

anschreiben. Hierin ist $V\ (X^{\mu,\nu},\ X^{\mu,\nu+1})$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für das gemeinsame Auftreten der Merkmale $X^{\mu,\nu}$ und $X^{\mu,\nu+1}$ zweier benachbarter Elemente, $V\ (X^{\mu,\nu},\ X^{\mu+1,\nu})$ das zweier aufeinanderfolgender Zustände des gleichen Elements. Wir bilden $G_i = \int\ (X_i^{\mu,\nu+1} - X_i^{\mu,\nu}),\ V\ (X^{\mu,\nu},\ X^{\mu,\nu+1})\ \mathrm{d}\, X^{\mu,\nu+1}$ und ähnlich mit $X^{\mu+1,\nu}$ statt $X^{\mu,\nu+1}$ J_σ; sowie auch H_{ik} und $K_{\sigma\tau}$ als entsprechende zweite Momente. Durch beiderseitige Multiplikation der genannten Integrodifferentialgleichungen mit $(X^{\mu,\nu+1} - X^{\mu,\nu})$ usw. und Grenzübergang $\delta\xi \to 0$, $\Delta t \to 0$ gelangt man zu Differentialgleichungen für die G_i, J_σ, H_{ik} und $K_{\sigma\tau}$. In diesen treten außer bekannten Funktionen der Variablen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{r}$ nur noch die unbekannten Funktionen G_i, J_σ, H_{ik} und $K_{\sigma\tau}$, sowie $V\ (X)$ auf. $V(X)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten der Merkmale X zum Parameterpunkt t, $\mathfrak{x}$. Sie sind partiell und von zweiter Ordnung. Eine weitere ähnliche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich für $V(X)$ durch unmittelbare Integration einer der beiden genannten Integrodifferentialgleichungen über $\mathrm{d}\, X^{\mu,\nu-1}$ bzw. $\mathrm{d}\, X^{\mu+1,\nu}$. Diese Differentialgleichungen bilden ein vollständiges System, durch das zusammen mit Anfangsbedingungen der Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte der Versetzungsverteilung definiert ist.

Eine ausführlichere Veröffentlichung der Rechnungen und Ergebnisse ist nach Abschluß von weiteren Untersuchungen, die auch Anwendungsbeispiele umfassen, beabsichtigt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit bin ich Herrn Prof. Dr. U. Dehlinger zu großem Dank verpflichtet.

* Jetzt Versuchsanstalt für Werkstofftechnik der Felten & Guilleaume Carlswerk A.G., Köln-Mülheim.

[1] Vgl. P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris 1948, S. 130.

[2] A. Kolmogoroff, Math. Ann. **104**, 415 [1931]; **108**, 149 [1933].